§1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

Nội dung

1. Khái niệm về phương trình vi phân
2. Phương trình vi phân cấp một
   - Đại cương về PTVP cấp 1
   - Phương trình vi phân tách biến
   - Phương trình vi phân đẳng cấp
   - Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1
   - Phương trình Bernoulli
   - Phương trình vi phân toàn phần

1. Khái niệm về phương trình vi phân

Định nghĩa 1.1

PTVP là phương trình có dạng

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

- x: biến độc lập.
- $y = y(x)$: hàm số cần tìm.
- $y', y'', \ldots, y^{(n)}$: đạo hàm các cấp của y.

Cấp của PTVP là cấp cao nhất của đạo hàm hoặc vi phân có mặt trong phương trình đó.

1. Khái niệm về phương trình vi phân

Định nghĩa 1.1

PTVP là phương trình có dạng

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

- x: biến độc lập.
- $y = y(x)$: hàm số cần tìm.
- $y', y'', \ldots, y^{(n)}$: đạo hàm các cấp của y.

Cấp của PTVP là cấp cao nhất của đạo hàm hoặc vi phân có mặt trong phương trình đó.

Ví dụ: 1. $y' + 2xy = 3x^2$ là PTVP cấp 1.
2. $y^{(3)} + 2xy'' - 3y = \sin x$ là PTVP cấp 3.

1. Khái niệm về phương trình vi phân

PTVP được gọi là tuyến tính cấp n nếu F là hàm bậc nhất đối với $y, y', \ldots, y^{(n)}$, tức là phương trình có dạng

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (*)$$

trong đó $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ là các hàm số cho trước.

- Nếu $f(x) \equiv 0$ thì $(*)$ là PTVP tuyến tính thuần nhất.
- Nếu $f(x) \not\equiv 0$ thì $(*)$ là PTVP tuyến tính không thuần nhất.

1. Khái niệm về phương trình vi phân

PTVP được gọi là tuyến tính cấp n nếu F là hàm bậc nhất đối với $y, y', \ldots, y^{(n)}$, tức là phương trình có dạng

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (*)$$

trong đó $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ là các hàm số cho trước.

- Nếu $f(x) \equiv 0$ thì $(*)$ là PTVP tuyến tính thuần nhất.
- Nếu $f(x) \not\equiv 0$ thì $(*)$ là PTVP tuyến tính không thuần nhất.

Định nghĩa 1.2

Nghiệm của PTVP là mọi hàm $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình.

2.1. Đại cương về PTVP cấp 1

Định nghĩa 2.1

PTVP cấp một là phương trình có dạng

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

hoặc

$$y' = f(x, y) \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2}$$

2.1. Đại cương về PTVP cấp 1

Định nghĩa 2.1

PTVP cấp một là phương trình có dạng

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

hoặc

$$y' = f(x, y) \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2}$$

Bài toán Cauchy: Tìm nghiệm $y = y(x)$ của PTVP (1) hoặc (2) thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$.

2.1. Đại cương về PTVP cấp 1

Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Cho phương trình vi phân cấp một

$$y' = f(x, y).$$

Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ chứa điểm (x_0, y_0) thì tồn tại nghiệm $y = y(x)$ trong lân cận x_0 thỏa mãn $y_0 = y(x_0)$. Ngoài ra, nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ cũng liên tục trên miền D thì nghiệm đó là duy nhất.

2.1. Đại cương về PTVP cấp 1

Định nghĩa 2.2

- Nghiệm tổng quát của PTVP cấp một là họ hàm số $y = \varphi(x, C)$ (C là một hằng số tùy ý) thỏa mãn phương trình.
  Từ nghiệm tổng quát, cho $C = C_0$ cụ thể thì $y = \varphi(x, C_0)$ được gọi là nghiệm riêng của PTVP.

2.1. Đại cương về PTVP cấp 1

Định nghĩa 2.2

- Nghiệm tổng quát của PTVP cấp một là họ hàm số $y = \varphi(x, C)$ (C là một hằng số tùy ý) thỏa mãn phương trình.
  Từ nghiệm tổng quát, cho $C = C_0$ cụ thể thì $y = \varphi(x, C_0)$ được gọi là nghiệm riêng của PTVP.
- Có khi giải PTVP cấp một ta không thu được nghiệm tổng quát dưới dạng tường minh $y = \varphi(x, C)$, mà chỉ thu được nghiệm tổng quát dưới dạng hàm ẩn xác định bởi hệ thức $\Phi(x, y, C) = 0$, hệ thức này được gọi là tích phân tổng quát của PTVP.
  Từ tích phân tổng quát, cho $C = C_0$ cụ thể thì $\Phi(x, y, C_0) = 0$ được gọi là tích phân riêng của PTVP.

2.1. Đại cương về PTVP cấp 1

Định nghĩa 2.2

- Nghiệm tổng quát của PTVP cấp một là họ hàm số $y = \varphi(x, C)$ (C là một hằng số tùy ý) thỏa mãn phương trình.
  Từ nghiệm tổng quát, cho $C = C_0$ cụ thể thì $y = \varphi(x, C_0)$ được gọi là nghiệm riêng của PTVP.
- Có khi giải PTVP cấp một ta không thu được nghiệm tổng quát dưới dạng tường minh $y = \varphi(x, C)$, mà chỉ thu được nghiệm tổng quát dưới dạng hàm ẩn xác định bởi hệ thức $\Phi(x, y, C) = 0$, hệ thức này được gọi là tích phân tổng quát của PTVP.
  Từ tích phân tổng quát, cho $C = C_0$ cụ thể thì $\Phi(x, y, C_0) = 0$ được gọi là tích phân riêng của PTVP.

Nghiệm không thể nhận được từ nghiệm tổng quát cho dù C lấy bất kỳ giá trị nào được gọi là nghiệm kỳ dị.

2.2. Phương trình vi phân tách biến

PTVP tách biến (PTVP với biến số phân ly)

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0. \tag{3}$$

Cách giải: Tích phân hai vế phương trình (3) ta được

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C,$$

với C là hằng số tùy ý.

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{ydy}{\sqrt{3+y^2}} = 0.$$

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{ydy}{\sqrt{3+y^2}} = 0.$$

Tích phân hai vế phương trình

$$\int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{ydy}{\sqrt{3+y^2}} = C$$

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{ydy}{\sqrt{3+y^2}} = 0.$$

Tích phân hai vế phương trình

$$\int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{ydy}{\sqrt{3+y^2}} = C$$

$$\Leftrightarrow \arctan x + \sqrt{3+y^2} = C$$

Vậy tích phân tổng quát của PTVP đã cho là $\arctan x + \sqrt{3+y^2} = C$.

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Phương trình vi phân có thể tách biến

$$P_1(x).Q_1(y)dx + P_2(x).Q_2(y)dy = 0. \quad (4)$$

Cách giải: Chia hai vế của phương trình (4) cho $P_2(x).Q_1(y) \neq 0$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C.$$

Chú ý: Nếu $P_2(x).Q_1(y) = 0$ tại $x = x_0$ (hoặc $y = y_0$) thì $x = x_0$ (hoặc $y = y_0$) cũng là nghiệm của PTVP.

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Ví dụ 2. Giải phương trình vi phân

$$\frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Ví dụ 2. Giải phương trình vi phân

$$\frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Điều kiện: $|x| < 1,\ |y| < 1$.

- $x = 0, y = 0$ là các nghiệm của PT.
- Với $x \neq 0,\ y \neq 0$, chia hai vế của PT cho $xy \neq 0$

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Ví dụ 2. Giải phương trình vi phân

$$\frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Điều kiện: $|x| < 1,\ |y| < 1$.

- $x = 0, y = 0$ là các nghiệm của PT.
- Với $x \neq 0,\ y \neq 0$, chia hai vế của PT cho $xy \neq 0$

$$\frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = C$$

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Xét $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

Đặt $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow tdt = -xdx,\ x^2 = 1 - t^2$. Do đó

$$I = \int \frac{-tdt}{t(1-t^2)} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right|.$$

Vậy tích phân tổng quát của PT đã cho là

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-y^2}-1}{\sqrt{1-y^2}+1}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right| = C$$

hay

$$(\sqrt{1-y^2}-1)(\sqrt{1-x^2}-1) = C_1xy.$$

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Ví dụ 3. Giải phương trình vi phân

$$y' + \sin(x + y) = \sin(x - y).$$

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Ví dụ 3. Giải phương trình vi phân

$$y' + \sin(x+y) = \sin(x-y).$$

$$y' + \sin(x+y) = \sin(x-y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \sin(x-y) - \sin(x+y) = -2\cos x \sin y.$$

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Ví dụ 3. Giải phương trình vi phân

$$y' + \sin(x+y) = \sin(x-y).$$

$$y' + \sin(x+y) = \sin(x-y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \sin(x-y) - \sin(x+y) = -2\cos x \sin y.$$

- $\sin y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ là nghiệm của PT.
- Với $y \neq k\pi$ ta có

$$\frac{dy}{\sin y} = -2\cos x dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{\sin y} = \int -2\cos x dx + C$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}} = -2\sin x + C \Leftrightarrow \int \frac{d(\tan\frac{y}{2})}{\tan\frac{y}{2}} = -2\sin x + C$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\tan\frac{y}{2}\right| = -2\sin x + C$$ là tích phân tổng quát của PT.

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Ví dụ 4. Tìm nghiệm của bài toán Cauchy

$$(x^2+1)y' = y^2+4, \;\; y(1) = 2.$$

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Ví dụ 4. Tìm nghiệm của bài toán Cauchy

$$(x^2+1)y' = y^2+4,\ \ y(1)=2.$$

PT được viết lại dưới dạng: $(x^2+1)dy = (y^2+4)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y^2+4} = \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2+4} = \int \frac{dx}{x^2+1} + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2} = \arctan x + C$$

Từ điều kiện ban đầu $y(1)=2$ suy ra $C + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow C = -\frac{\pi}{8}$.

Vậy nghiệm của bài toán Cauchy là $\arctan\frac{y}{2} = 2\arctan x - \frac{\pi}{4}$.

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Cách giải PTVP dạng $y' = f(ax + by + c)$

Đặt $u(x) = ax + by + c \Rightarrow u' = a + by' \Rightarrow y' = \dfrac{u' - a}{b}$.

PTVP đã cho trở thành:

$$\begin{aligned}
&\frac{u' - a}{b} = f(u) \\
\Leftrightarrow\ & u' = a + bf(u) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{du}{dx} = a + bf(u) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{du}{a + bf(u)} = dx, \qquad (\text{với } a + bf(u) \neq 0) \\
\Leftrightarrow\ & \int \frac{du}{a + bf(u)} = \int dx + C.
\end{aligned}$$

Chú ý: Nếu $a + bf(u) = 0$ tại $u = u_0$ thì $y = \dfrac{u_0 - ax - c}{b}$ là một nghiệm của PTVP.

2.2. Phương trình vi phân tách biến

Ví dụ 5. Giải phương trình vi phân

$$y' = \cos(x - y - 1).$$

Đặt $u = x - y - 1 \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$.
PTVP đã cho trở thành

$$1 - u' = \cos u \Leftrightarrow u' = 1 - \cos u \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 1 - \cos u.$$

- Nếu $1 - \cos u \neq 0$ ta có

$$\frac{du}{1 - \cos u} = dx \Leftrightarrow \int \frac{du}{1 - \cos u} = \int dx + C \Leftrightarrow \int \frac{du}{2\sin^2 \frac{u}{2}} = x + C \Leftrightarrow -\cot \frac{u}{2} = x + C$$

$\Rightarrow -\cot \dfrac{x - y - 1}{2} = x + C$ là tích phân tổng quát của PTVP đã cho.

- Nếu $1 - \cos u = 0 \Leftrightarrow \cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\Rightarrow y = x - 1 - k2\pi$ là nghiệm của PTVP đã cho.

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

Phương trình vi phân đẳng cấp

$$y' = f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5}$$

Cách giải: Đặt $u(x) = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = x.u \Rightarrow y' = u + x.u'$.

Phương trình (5) trở thành:

$$\begin{aligned} & u + x.u' = \varphi(u) \\ \Leftrightarrow\ & x.\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u \\ \Leftrightarrow\ & \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}, \qquad (\text{với } \varphi(u) - u \neq 0) \\ \Leftrightarrow\ & \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C. \end{aligned}$$

Chú ý: Nếu $\varphi(u) - u = 0$ tại $u = u_0$ thì $y = u_0 x$ cũng là nghiệm của PTVP.

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

Ví dụ 6. Giải phương trình vi phân

$$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

Ví dụ 6. Giải phương trình vi phân

$$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Điều kiện: $x \neq 0$. Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = x.u \Rightarrow y' = u + x.u'$.

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

Ví dụ 6. Giải phương trình vi phân

$$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Điều kiện: $x \neq 0$. Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = x.u \Rightarrow y' = u + x.u'$.

PTVP đã cho trở thành:

$$u + x.u' = e^{-u} + u$$
$$\Leftrightarrow x.\frac{du}{dx} = e^{-u} \Leftrightarrow \frac{du}{e^{-u}} = \frac{dx}{x}$$

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

Ví dụ 6. Giải phương trình vi phân

$$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Điều kiện: $x \neq 0$. Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = x.u \Rightarrow y' = u + x.u'$.

PTVP đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} & u + x.u' = e^{-u} + u \\ \Leftrightarrow\ & x.\frac{du}{dx} = e^{-u} \Leftrightarrow \frac{du}{e^{-u}} = \frac{dx}{x} \\ \Leftrightarrow\ & \int \frac{du}{e^{-u}} = \int \frac{dx}{x} \\ \Leftrightarrow\ & \int e^{u} du = \ln|x| + \ln|C| \Leftrightarrow e^{u} = \ln|Cx| \end{aligned}$$

$\Rightarrow e^{\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$ là tích phân tổng quát của PTVP đã cho.

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

Ví dụ 7. Giải phương trình vi phân

$$xy' - y + x\cos\frac{y}{x} = 0.$$

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

Ví dụ 7. Giải phương trình vi phân

$$xy' - y + x\cos\frac{y}{x} = 0.$$

Điều kiện: $x \neq 0$. Ta có

$$xy' - y + x\cos\frac{y}{x} = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} - \cos\frac{y}{x}.$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = x.u \Rightarrow y' = u + x.u'$.

PTVP đã cho trở thành:

$$u + x.u' = u - \cos u$$
$$\Leftrightarrow x.\frac{du}{dx} = -\cos u$$

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

- Nếu $\cos u \neq 0$ ta có:

$$\frac{du}{\cos u} = -\frac{dx}{x}$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{du}{\cos u} = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{\cos u.du}{\cos^2 u} = -\ln|x| + \ln|C|$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{d(\sin u)}{1-\sin^2 u} = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\frac{y}{x}}{1-\sin\frac{y}{x}}\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$ là tích phân tổng quát của PTVP đã cho.

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

- Nếu $\cos u \neq 0$ ta có:

$$\frac{du}{\cos u} = -\frac{dx}{x}$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{du}{\cos u} = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{\cos u.du}{\cos^2 u} = -\ln|x| + \ln|C|$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{d(\sin u)}{1-\sin^2 u} = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\frac{y}{x}}{1-\sin\frac{y}{x}}\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$ là tích phân tổng quát của PTVP đã cho.

- Nếu $\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x$ cũng là nghiệm của PT.

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

Phương trình vi phân dạng

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: $a_1b_2 = a_2b_1$, tức là

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow a_1 = ka_2,\ \ b_1 = kb_2.$$

Do đó

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = g(a_2x + b_2y).$$

Phương trình đưa được về dạng đã xét trong slide 15.

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

- Trường hợp 2: $a_1b_2 \neq a_2b_1$. Trong trường hợp này, hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{có một nghiệm duy nhất } (x_0, y_0).$$

Đặt $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ ta có: $dx = dX,\ dy = dY$ và

$$a_1x + b_1y + c_1 = a_1X + b_1Y, \qquad a_2x + b_2y + c_2 = a_2X + b_2Y.$$

Phương trình ban đầu trở thành $\dfrac{dY}{dX} = f\left(\dfrac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\dfrac{a_1 + b_1\dfrac{Y}{X}}{a_2 + b_2\dfrac{Y}{X}}\right) = g\left(\dfrac{Y}{X}\right)$

là PT đẳng cấp.

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

Ví dụ 8. Giải phương trình vi phân

$$y' = \frac{2x - 2y + 1}{-x + y + 1}.$$

Ta có

$$y' = \frac{2(x - y) + 1}{-(x - y) + 1}.$$

Đặt $u = x - y \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$. Phương trình trở thành

$$1 - u' = \frac{2u + 1}{-u + 1} \quad \text{hay} \quad \frac{du}{dx} = \frac{3u}{u - 1}.$$

- Với $u = 0$ thì $y = x$ thỏa mãn phương trình đã cho nên nó là một nghiệm.

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

- Với $u \neq 0$ ta có

$$\frac{u-1}{3u}du = dx.$$

Tích phân hai vế ta được

$$\frac{1}{3}u - \frac{1}{3}\ln|u| = x + C.$$

Suy ra

$$x - y - \ln|x-y| = 3x + 3C \quad \text{hay} \quad y + \ln|x-y| = -2x + C_1$$

là tích phân tổng quát của phương trình.

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

Ví dụ 9. Giải phương trình vi phân

$$y' = \frac{x - y + 3}{x + y - 1}.$$

Ta thấy $a_1 b_2 = 1 \neq -1 = a_2 b_1$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ được nghiệm duy nhất $(-1, 2)$.

Đặt $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$, thay vào phương trình đã cho ta được

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y} = \frac{1 - \dfrac{Y}{X}}{1 + \dfrac{Y}{X}}.$$

2.3. Phương trình vi phân đẳng cấp

Đặt $u = \dfrac{Y}{X} \Rightarrow Y = u.X \Rightarrow Y' = u'.X + u$. Phương trình trên trở thành

$$u'.X + u = \frac{1-u}{1+u} \Leftrightarrow X.\frac{du}{dX} = \frac{1-2u-u^2}{1+u}.$$

- Nếu $1 - 2u - u^2 = 0 \Leftrightarrow u = -1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow y = (-1 \pm \sqrt{2})(x+1) + 2$ là nghiệm của phương trình ban đầu.

- Nếu $1 - 2u - u^2 \neq 0$ thì ta có: $\dfrac{1+u}{1-2u-u^2}du = \dfrac{dX}{X}$.

Tích phân hai vế ta được

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2u-u^2| + \frac{1}{2}\ln|C| = \ln|X| \quad \text{hay} \quad X^2(1-2u-u^2) = C.$$

Trở lại biến cũ ta được tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$(x+1)^2 - 2(x+1)(y-2) - (y-2)^2 = C.$$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

PTVP tuyến tính cấp một

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{6}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là các hàm liên tục của x.

- Nếu $q(x) \equiv 0$ thì phương trình (6) là PTVP tuyến tính thuần nhất.
- Nếu $q(x) \not\equiv 0$ thì phương trình (6) là PTVP tuyến tính không thuần nhất.

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Cách giải:

- Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$y' + p(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y.$$

+ $y = 0$ là một nghiệm của PT trên.
+ Nếu $y \neq 0$ ta có

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + \ln|C| \quad (C \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \Rightarrow y = C.e^{-\int p(x)dx}.$$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Vậy nghiệm tổng quát của PT thuần nhất là

$$y = C.e^{-\int p(x)dx} \qquad (C \text{ là hằng số tùy ý}).$$

- Tìm nghiệm tổng quát của PT không thuần nhất (6) dưới dạng

$$y = C(x).e^{-\int p(x)dx} \qquad (C(x) \text{ là hàm của } x).$$

$$y' = C'(x).e^{-\int p(x)dx} + C(x).\left(-\int p(x)dx\right)'.e^{-\int p(x)dx}$$

$$= C'(x).e^{-\int p(x)dx} - C(x).p(x).e^{-\int p(x)dx}.$$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Thay y, y' vào PT không thuần nhất (6) và rút gọn ta được

$$C'(x).e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C'(x) = q(x).e^{\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow C(x) = \int q(x).e^{\int p(x)dx} dx + C_1.$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (6) là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1\right),$$

với C_1 là hằng số tùy ý.

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Công thức nghiệm tổng quát

Nghiệm tổng quát của PTVP tuyến tính cấp một $y' + p(x)y = q(x)$ là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) \tag{7}$$

với C là hằng số tùy ý.

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Nghiệm tổng quát của PT (6) có thể biểu diễn dưới dạng:

$$y = \overline{y} + y^*,$$

trong đó $\overline{y} = C.e^{-\int p(x)dx}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng và $y^* = e^{-\int p(x)dx}.\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất.

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ 10. Giải phương trình vi phân

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ 10. Giải phương trình vi phân

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

PTVP đã cho là PTVP tuyến tính cấp một với $p(x) = 2x$ và $q(x) = xe^{-x^2}$. Nghiệm tổng quát của PT là

$$y = e^{-\int 2xdx}\left(\int xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx + C\right)$$

$$= e^{-x^2}\left(\int xe^{-x^2}e^{x^2}dx + C\right) = e^{-x^2}\left(\int xdx + C\right) = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ 11. Giải bài toán Cauchy

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3, \; y(0) = \frac{1}{2}.$$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ 11. Giải bài toán Cauchy

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3, \ y(0) = \frac{1}{2}.$$

PTVP đã cho là PTVP tuyến tính cấp một với $p(x) = -\dfrac{2}{x+1}$ và $q(x) = (x+1)^3$.

Nghiệm tổng quát của PT là

$$y = e^{-\int -\frac{2}{x+1}dx}\left(\int (x+1)^3 e^{\int -\frac{2}{x+1}dx}dx + C\right)$$

$$= e^{2\ln|x+1|}\left(\int (x+1)^3 e^{-2\ln|x+1|}dx + C\right)$$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

$$y = (x+1)^2\left(\int (x+1)^3(x+1)^{-2}dx + C\right)$$
$$= (x+1)^2\left(\int (x+1)dx + C\right) = (x+1)^2\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right).$$

Từ điều kiện ban đầu $y(0) = \frac{1}{2}$ suy ra $C = \frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của bài toán Cauchy đã cho là

$$y = (x+1)^2\left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right).$$

Chú ý: $e^{\ln b} = b, \quad e^{a\ln b} = b^a$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ 12. Giải phương trình vi phân

$$(y + \ln x)dx - xdy = 0.$$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ 12. Giải phương trình vi phân

$$(y + \ln x)dx - xdy = 0.$$

Điều kiện: $x > 0$.

$$(y + \ln x)dx - xdy = 0 \Leftrightarrow (y + \ln x)dx = xdy$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}$$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ 12. Giải phương trình vi phân

$$(y + \ln x)dx - xdy = 0.$$

Điều kiện: $x > 0$.

$$(y + \ln x)dx - xdy = 0 \Leftrightarrow (y + \ln x)dx = xdy$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}$$

PTVP trên là PTVP tuyến tính cấp một với $p(x) = -\frac{1}{x}$ và $q(x) = \frac{\ln x}{x}$. Nghiệm tổng quát của PT là

$$y = e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left(\int \frac{\ln x}{x} e^{\int -\frac{1}{x}dx} dx + C\right)$$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

$$y = e^{\ln x}\left(\int \frac{\ln x}{x} e^{-\ln x} dx + C\right) = x\left(\int \frac{\ln x}{x^2} dx + C\right).$$

Xét $I = \int \frac{\ln x}{x^2} dx.$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

$$y = e^{\ln x}\left(\int \frac{\ln x}{x} e^{-\ln x} dx + C\right) = x\left(\int \frac{\ln x}{x^2} dx + C\right).$$

Xét $I = \int \frac{\ln x}{x^2} dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

$$y = e^{\ln x}\left(\int \frac{\ln x}{x} e^{-\ln x} dx + C\right) = x\left(\int \frac{\ln x}{x^2} dx + C\right).$$

Xét $I = \int \frac{\ln x}{x^2} dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$$I = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y = x\left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C\right) = Cx - \ln x - 1.$$

Vậy nghiệm tổng quát của PTVP đã cho là $y = Cx - \ln x - 1$.

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ 13. Giải phương trình vi phân

$$2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0.$$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ 13. Giải phương trình vi phân

$$2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0.$$

Nhận thấy $y = 0$ là một nghiệm của PT. Với $y \neq 0$, PT đã cho được viết lại dưới dạng:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{y^2 - 6x}{2y} = 0 \Leftrightarrow x' - \frac{3}{y}x = -\frac{y}{2}.$$

Ta coi $x = x(y)$. PT là PTVP tuyến tính với $p(y) = -\frac{3}{y}$, $q(y) = -\frac{y}{2}$. NTQ của PT là

$$x = e^{\int \frac{3}{y}dy}\left(-\int \frac{y}{2}e^{-\int \frac{3}{y}dy}dy + C\right) = e^{3\ln|y|}\left(-\int \frac{y}{2}e^{-3\ln|y|}dy + C\right)$$

$$= y^3\left(-\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2} + C\right) = Cy^3 + \frac{y^2}{2}.$$

2.5. Phương trình Bernoulli

Phương trình Bernoulli

$$y' + p(x).y = q(x).y^{\alpha}, \qquad (\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1) \tag{8}$$

Cách giải: Chia hai vế của phương trình (8) cho $y^{\alpha} \neq 0$ ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x).y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $u(x) = y^{1-\alpha} \Rightarrow u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{u'}{1-\alpha} + p(x)u = q(x) \Leftrightarrow u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x).$$

Phương trình trên là PTVP tuyến tính cấp 1. Sau khi tìm được nghiệm tổng quát của phương trình này, trở về biến y, ta được nghiệm tổng quát hoặc tích phân tổng quát của phương trình Bernoulli đã cho.

Chú ý: Nếu $\alpha > 0$ thì $y = 0$ là một nghiệm của phương trình Bernoulli.

2.5. Phương trình Bernoulli

Ví dụ 14. Giải phương trình vi phân

$$y' - 2xy = 3x^3y^2.$$

2.5. Phương trình Bernoulli

Ví dụ 14. Giải phương trình vi phân

$$y' - 2xy = 3x^3y^2.$$

- $y = 0$ là một nghiệm của PT.

2.5. Phương trình Bernoulli

Ví dụ 14. Giải phương trình vi phân

$$y' - 2xy = 3x^3y^2.$$

- $y = 0$ là một nghiệm của PT.
- Với $y \neq 0$, chia hai vế của PT cho y^2 ta được

$$\frac{y'}{y^2} - 2x.\frac{1}{y} = 3x^3.$$

Đặt $u = \dfrac{1}{y} \Rightarrow u' = -\dfrac{y'}{y^2}$. Phương trình trở thành

$$-u' - 2xu = 3x^3 \Leftrightarrow u' + 2xu = -3x^3.$$

2.5. Phương trình Bernoulli

PT này là PTVP tuyến tính cấp một có nghiệm tổng quát là

$$u = e^{-\int 2xdx}\left(\int -3x^3 e^{\int 2xdx}dx + C\right) = e^{-x^2}\left(\int -3x^3 e^{x^2}dx + C\right).$$

Xét $I = \int -3x^3 e^{x^2}dx = -3\int x^2 e^{x^2}xdx$. Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$.

$$I = -\frac{3}{2}\int te^t dt = -\frac{3}{2}\int td(e^t) = -\frac{3}{2}(te^t - e^t) = -\frac{3}{2}e^{x^2}(x^2-1).$$

$\Rightarrow u = -\frac{3}{2}(x^2-1) + Ce^{-x^2}$.

Nghiệm tổng quát của PT đã cho là $y = \dfrac{1}{-\frac{3}{2}(x^2-1) + Ce^{-x^2}}$.

2.5. Phương trình Bernoulli

Ví dụ 15. Giải phương trình vi phân

$$(y \ln x - 2)ydx = xdy.$$

2.5. Phương trình Bernoulli

Ví dụ 15. Giải phương trình vi phân

$$(y \ln x - 2)ydx = xdy.$$

Điều kiện: $x > 0$. Phương trình đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2.$$

2.5. Phương trình Bernoulli

Ví dụ 15. Giải phương trình vi phân

$$(y \ln x - 2)ydx = xdy.$$

Điều kiện: $x > 0$. Phương trình đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2.$$

- $y = 0$ là nghiệm của PT.

2.5. Phương trình Bernoulli

Ví dụ 15. Giải phương trình vi phân

$$(y \ln x - 2)ydx = xdy.$$

Điều kiện: $x > 0$. Phương trình đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2.$$

- $y = 0$ là nghiệm của PT.
- Với $y \neq 0$, chia hai vế của PT cho y^2 ta được

$$y^{-2}y' + \frac{2}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x}.$$

2.5. Phương trình Bernoulli

Ví dụ 15. Giải phương trình vi phân

$$(y \ln x - 2)ydx = xdy.$$

Điều kiện: $x > 0$. Phương trình đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2.$$

- $y = 0$ là nghiệm của PT.
- Với $y \neq 0$, chia hai vế của PT cho y^2 ta được

$$y^{-2}y' + \frac{2}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x}.$$

Đặt $u = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y'$. PT trở thành

$$-u' + \frac{2}{x}u = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow u' - \frac{2}{x}u = -\frac{\ln x}{x}.$$

2.5. Phương trình Bernoulli

$$u = e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left(\int -\frac{\ln x}{x}e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx + C\right)$$

$$= e^{2\ln x}\left(-\int \frac{\ln x}{x}e^{-2\ln x}dx + C\right) = x^2\left(-\int \frac{\ln x}{x^3}dx + C\right)$$

2.5. Phương trình Bernoulli

$$u = e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left(\int -\frac{\ln x}{x}e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx + C\right)$$

$$= e^{2\ln x}\left(-\int \frac{\ln x}{x}e^{-2\ln x}dx + C\right) = x^2\left(-\int \frac{\ln x}{x^3}dx + C\right)$$

Xét $I = \int \frac{\ln x}{x^3}dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{2x^2} \end{cases}$

$$I = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}.$$

$\Rightarrow u = Cx^2 + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{Cx^2 + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}}$ là nghiệm tổng quát của PT đã cho.

2.6.1. Phương trình vi phân toàn phần

Giả sử $P(x, y)$, $Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền đơn liên D.

Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{9}$$

được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu

$$P'_y = Q'_x, \quad \forall (x, y) \in D. \tag{10}$$

Điều kiện (10) suy ra tồn tại hàm $u(x, y)$ thỏa mãn $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Do đó, tích phân tổng quát của phương trình (9) là $u(x, y) = C$.

2.6.1. Phương trình vi phân toàn phần

Cách giải: Chọn tùy ý một điểm $(x_0, y_0) \in D$. Tích phân tổng quát của PTVP toàn phần $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ có dạng

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = C \tag{11}$$

hoặc

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = C \tag{12}$$

2.6.1. Phương trình vi phân toàn phần

Ví dụ 16. Giải phương trình vi phân

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0.$$

2.6.1. Phương trình vi phân toàn phần

Ví dụ 16. Giải phương trình vi phân

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0.$$

Đặt $\begin{cases} P(x,y)=1+e^{\frac{x}{y}} \\ Q(x,y)=e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} \\ Q'_x=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} \end{cases}$

$\Rightarrow P'_y=Q'_x \Rightarrow$ PTVP đã cho là PTVP toàn phần.

2.6.1. Phương trình vi phân toàn phần

Chọn $(x_0, y_0) = (0, 1)$, tích phân tổng quát của PTVP đã cho là

$$\int_0^x P(x,y)dx + \int_1^y Q(0,y)dy = C$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \int_1^y dy = C$$

$$\Leftrightarrow \left(x + ye^{\frac{x}{y}}\right)\Big|_0^x + y\Big|_1^y = C$$

$$\Leftrightarrow x + ye^{\frac{x}{y}} - y + y - 1 = C$$

$$\Leftrightarrow x + ye^{\frac{x}{y}} = C_1$$

2.6.1. Phương trình vi phân toàn phần

Ví dụ 17. Giải bài toán Cauchy

$$ydx + (y^4 + x)dy = 0, \quad y(0) = 2.$$

2.6.1. Phương trình vi phân toàn phần

Ví dụ 17. Giải bài toán Cauchy

$$ydx + (y^4 + x)dy = 0, \quad y(0) = 2.$$

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = y \\ Q(x,y) = y^4 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 1 \\ Q'_x = 1 \end{cases} \Rightarrow P'_y = Q'_x$

$\Rightarrow$ PTVP đã cho là PTVP toàn phần.

2.6.1. Phương trình vi phân toàn phần

Ví dụ 17. Giải bài toán Cauchy

$$ydx + (y^4 + x)dy = 0, \quad y(0) = 2.$$

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = y \\ Q(x,y) = y^4 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 1 \\ Q'_x = 1 \end{cases} \Rightarrow P'_y = Q'_x$

$\Rightarrow$ PTVP đã cho là PTVP toàn phần.

Chọn $(x_0, y_0) = (0, 0)$, tích phân tổng quát của PTVP đã cho là

$$\int_0^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy = C$$

$$\Leftrightarrow \int_0^y (y^4 + x)dy = C$$

2.6.1. Phương trình vi phân toàn phần

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y^5}{5} + xy\right)\Big|_0^y = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^5}{5} + xy = C$$

$y(0) = 2 \Rightarrow C = \dfrac{32}{5}$. Do đó, nghiệm của bài toán Cauchy là

$$\frac{y^5}{5} + xy = \frac{32}{5}.$$

2.6.2. Thừa số tích phân

Trong một số trường hợp phương trình

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

không phải là phương trình vi phân toàn phần nhưng có thể tìm được hàm $\lambda(x,y)$ sao cho phương trình

$$\lambda(x,y)P(x,y)dx + \lambda(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần. Khi đó, hàm $\lambda(x,y)$ được gọi là *thừa số tích phân*. Như vậy, hàm $\lambda = \lambda(x,y)$ cần tìm phải thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x}. \tag{13}$$

2.6.2. Thừa số tích phân

Trường hợp đặc biệt tìm thừa số tích phân:

1. $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q} = \varphi(x) \Rightarrow \lambda(x) = e^{\int \varphi(x)dx}$
2. $\dfrac{Q'_x - P'_y}{P} = \psi(y) \Rightarrow \lambda(y) = e^{\int \psi(y)dy}$

2.6.2. Thừa số tích phân

Ví dụ 18. Giải PTVP

$$(x^2 - 2y + 1)dx - xdy = 0.$$

2.6.2. Thừa số tích phân

Ví dụ 18. Giải PTVP

$$(x^2 - 2y + 1)dx - xdy = 0.$$

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = x^2 - 2y + 1, \\ Q(x,y) = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = -2, \\ Q'_x = -1 \end{cases} \Rightarrow P'_y \neq Q'_x$

$\Rightarrow$ PT đã cho không phải là PTVP toàn phần.

2.6.2. Thừa số tích phân

Ví dụ 18. Giải PTVP

$$(x^2 - 2y + 1)dx - xdy = 0.$$

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = x^2 - 2y + 1, \\ Q(x,y) = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = -2, \\ Q'_x = -1 \end{cases} \Rightarrow P'_y \neq Q'_x$

$\Rightarrow$ PT đã cho không phải là PTVP toàn phần.

Ta có $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow$ Thừa số tích phân là $\lambda(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x.$

Nhân hai vế PT đã cho với $\lambda(x) = x$ ta được PTVP toàn phần:

$$\left(x^3 - 2xy + x\right) dx - x^2 dy = 0.$$

2.6.2. Thừa số tích phân

Chọn $(x_0, y_0) = (0, 0)$, tích phân tổng quát của phương trình là

$$\int_0^x \left(x^3 + x\right) dx - \int_0^y x^2 dy = C \Leftrightarrow \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x^2 y = C.$$

2.6.2. Thừa số tích phân

Ví dụ 19. Giải PTVP

$$(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$$

2.6.2. Thừa số tích phân

Ví dụ 19. Giải PTVP

$$(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$$

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = 2xy^2 - y, \\ Q(x,y) = y^2 + x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 4xy - 1, \\ Q'_x = 1 \end{cases} \Rightarrow P'_y \neq Q'_x$

$\Rightarrow$ PT đã cho không phải là PTVP toàn phần.

2.6.2. Thừa số tích phân

Ví dụ 19. Giải PTVP

$$(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$$

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = 2xy^2 - y, \\ Q(x,y) = y^2 + x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 4xy - 1, \\ Q'_x = 1 \end{cases} \Rightarrow P'_y \neq Q'_x$

$\Rightarrow$ PT đã cho không phải là PTVP toàn phần.

Ta có $\dfrac{Q'_x - P'_y}{P} = \dfrac{2 - 4xy}{2xy^2 - y} = -\dfrac{2}{y} \Rightarrow \lambda(y) = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = \dfrac{1}{y^2}.$

Nhân hai vế PT đã cho với $\lambda(y) = \dfrac{1}{y^2}$ ta được PTVP toàn phần:

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

2.6.2. Thừa số tích phân

Chọn $(x_0, y_0) = (0, 1)$, tích phân tổng quát của phương trình là

$$\int_0^x \left(2x - \frac{1}{y}\right) dx + \int_1^y \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = C$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{x}{y}\right)\Big|_0^x + (y + \ln|y|)\Big|_1^y = C$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| - 1 = C$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| = C_1.$$

Ngoài ra, phương trình đã cho cũng có nghiệm $y = 0$.